Lattice Theory における Felscher の「非対称な結合律」について

芝　原　　茂

一つの集合の上に，二つの二項結合 $\vee$ と $\wedge$ とを持つた algebra は 次の條件を満足するとき，lattice と呼ばれる。

$$(K\vee)\quad x\vee y=y\vee x$$

$$(K\wedge)\quad x\wedge y=y\wedge x$$

$$(A_s\vee)\quad x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$$

$$(A_s\wedge)\quad x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$$

$$(A_b\vee)\quad x\vee(x\wedge y)=x$$

$$(A_b\wedge)\quad x\wedge(x\vee y)=x$$

簡單に lattice は次の公理系を満足するということにする。

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} K\vee & A_s\vee & A_b\vee \\ K\wedge & A_s\wedge & A_b\wedge \end{pmatrix}$$

しかし任意の lattice は次の公理をも満足する。

$$(A_u\vee)\quad x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee(x\vee z)$$

$$(A_u\wedge)\quad x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge(x\wedge z)$$

さて公理系(1)の $(A_s\vee)$，$(A_s\wedge)$ を $(A_u\vee)$，$(A_u\wedge)$ でおきかえて作つた次の各公理系(2)，(3)，(4)はすべて(1)と同等になる。

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & A_b\vee \\ K\wedge & A_u\wedge & A_b\wedge \end{pmatrix}$$

$$(3)\qquad \begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & & A_b\vee \\ K\wedge & & A_s\wedge & A_b\wedge \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} K\vee & A_s\vee & A_b\vee \\ K\wedge & A_u\wedge & A_b\wedge \end{pmatrix}$

この様にある公理系では，$(A_u\vee)$，$(A_u\wedge)$ は，通常の結合律 $(A_s\vee)$，$(A_s\wedge)$ とおきかえることが出來るから，非對稱な結合律と言つておこう。この非對稱な結合律は lattice の特性である。例えば group の乗法において，一般には $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot(x\cdot z)$ は成立たない。

更に，任意の lattice は尙次の公理をも満足する。

$(I\vee)$ $x\vee x=x$

$(I\wedge)$ $x\wedge x=x$

$(B\vee)$ $x\vee y=x$ ならば $x\wedge y=y$

$(B\wedge)$ $x\wedge y=x$ ならば $x\vee y=y$

そこで公理系(1)，(3)，(4)の $(A_b\wedge)$，$(A_b\vee)$ を $(I\vee)$，$(B\vee)$，$(I\wedge)$，$(B\wedge)$ でおきかえて作つた次の各公理系は又(1)と同等になる。

(5) $\begin{pmatrix} K\vee & A_s\vee & I\vee & B\vee \\ K\wedge & A_s\wedge & I\wedge & B\wedge \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & I\vee & B\vee \\ K\wedge & A_s\wedge & I\wedge & B\wedge \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} K\vee & A_s\vee & I\vee & B\vee \\ K\wedge & A_u\wedge & I\wedge & B\wedge \end{pmatrix}$

しかし公理系(2)において同様のおきかえをして作つた次の公理系は，公理系(1)と同等にならない。

(8) $\begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & I\vee & B\vee \\ K\wedge & A_u\wedge & I\wedge & B\wedge \end{pmatrix}$

ここで更に任意の lattice で成立つ次の公理

$(D\vee)$ $x\vee(x\vee y)=x\vee y$

$(D\wedge)$ $x\wedge(x\wedge y)=x\wedge y$

を公理系(8)に附加し，更に $(I\vee)$，$(I\wedge)$ を省略して次の各公理系を作ると，そ

れらはいずれも公理系(1)と同等になる。

$$(9) \quad \begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & B\vee & D\vee \\ K\wedge & A_u\wedge & B\wedge & \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} K\vee & A_u\vee & B\vee & \\ K\wedge & A_u\wedge & B\wedge & D\wedge \end{pmatrix}$$

§ 1

[補題1]　(W. Felscher [1]) $(A_b\vee)$, $(A_b\wedge)$, $(K\vee)$, $(A_s\vee)$ より $(A_u\vee)$ が得られる。

[證明]　$(A_b\vee)$ と $(A_b\wedge)$ により，任意のxに對して $x\vee x=x$ が成立つから，(cf. [補題8]) $(K\vee)$ と $(A_s\vee)$ によつて，任意の x, y, z に對して $x\vee(y\vee z)=(x\vee x)\vee(y\vee z)=x\vee\{x\vee(y\vee z)\}=x\vee\{(x\vee y)\vee z\}=\{(x\vee y)\vee z\}\vee x=(x\vee y)\vee(z\vee x)=(x\vee y)\vee(x\vee z)$ が成立つ。

[補題1′]　$(A_b\vee)$, $(A_b\wedge)$, $(K\wedge)$, $(A_s\wedge)$ より $(A_u\wedge)$ が得られる。

[證明]　二項結合∨と∧の双對性より明らかである。

[補題2]　$(K\vee)$, $(K\wedge)$, $(A_b\vee)$, $(A_b\wedge)$ が滿足されているとき，$x\vee y=x$ と $x\wedge y=y$ とは同等である。

[證明]　$x\vee y=x$ ならば $(K\vee)$ によつて $y\vee x=x$ であり，$(A_b\wedge)$ によつて $y=y\wedge(y\vee x)=y\wedge x$。$(A_b\wedge)$ と $(K\wedge)$ によつて逆も成立つ。

[定義1]　$(A_u\vee)$, $(K\vee)$, $(A_b\vee)$, $(K\wedge)$, $(A_b\wedge)$ を滿足している algebra において，次によつて二項關係>を定義する。

(O)　$x\vee y=x$ のとき，そのときのみ　$x>y$ 又は $y<x$ とする。

[補題3]〔定義1〕の意味の二項關係>は反對稱律を滿足する。卽ち $x>y$ かつ $y>x$ ならば $x=y$ である。

[證明]　定義より $x>y$ かつ $y>x$ ならば，$x\vee y=x$ かつ $y\vee x=y$ であり，$(K\vee)$ より $x=y$。

[補題4]〔定義1〕の意味の二項關係>では常に $x\vee y>x$ と $x\vee y>y$ が

成立つ。

[證明] $(A_b\wedge)$により $x\wedge(x\vee y)=x$ が常に成立つから, $(K\wedge)$ によつて $(x\vee y)\wedge x=x$。從つて [補題2] により $(x\vee y)\vee x=x\vee y$ 故に $(x\vee y)>x$。同樣に $y\vee x>y$ が成立つから$(K\vee)$により $x\vee y>y$。

[補題5] [定義1] の意味の二項關係$>$に關して, $x\vee y$ は x,y の supremum の性質を持つ。即ち $v>x$ かつ $v>y$ ならば $v>x\vee y$。

[證明] $v>x$ かつ $v>y$ ならば $v\vee x=v$ かつ $v\vee y=v$ だから, $(A_u\vee)$によつて, $v=(v\vee x)=(v\vee x)\vee v=(v\vee x)\vee(v\vee y)=v\vee(x\vee y)$。 從つて $v>x\vee y$。

[補題6] [定義1] の意味の二項關係$>$は推移律を滿足する。 即ち $x>z$ かつ $z>y$ ならば $x>y$。

[證明] $x>z$ かつ $z>y$ ならば, $x\vee z=x$ かつ $z\vee y=z$ であるから, $(A_u\vee)$によつて, $x\vee(x\vee y)=(x\vee z)\vee(x\vee y)=x\vee(z\vee y)=x\vee z=x$。 從つて $x>x\vee y$。ところが [補題4] によつて常に $x<x\vee y$ が成立つから, 反對稱律より, $x\vee y=x$。 從つて$x>y$。

[補題7] $(A_u\vee)$, $(K\vee)$, $(K\wedge)$, $(A_b\vee)$, $(A_b\wedge)$より$(A_s\vee)$が得られる。

[證明] [補題4] によつて, 任意の x, y, z に對し

$$x\vee(y\vee z)>x\cdots\cdots①$$

$$x\vee(y\vee z)>y\vee z$$

更に

$$y\vee z>y \qquad y\vee z>z$$

だから推移律によつて,

$$x\vee(y\vee z)>y\cdots\cdots②$$

$$x\vee(y\vee z)>z\cdots\cdots③$$

$x\vee y$ は x と y との supremum だから, ①, ②より

$$x\vee(y\vee z)>x\vee y\cdots\cdots④$$

又 $(x\vee y)\vee z$ は $x\vee y$ と z との supremum だから③と④より

$x \vee (y \vee z) > (x \vee y) \vee z$ ……………………………………………⑤

⑤において x, y, z を z, y, x でおきかえ，更に ($K\vee$) を使えば，

$z \vee (y \vee x) > (z \vee y) \vee x$

$x \vee (y \vee z) < (x \vee y) \vee z$ ……………………………………………⑥

⑤と⑥とに反對稱律を使つて

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

が得られる。

[補題2]によつて，($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_b\vee$), ($A_b\wedge$) が滿足されている時は，(O)は次の (O′) と同等である。

(O′) $x \wedge y = y$ のとき，そのときにのみ　$x > y$ 又 は$y < x$とする。

従つて，($A_u\wedge$), ($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_b\vee$), ($A_b\wedge$)が滿足されている algebra において，(O′) 又は (O) で二項關係$>$を定義すれば，同様に [補題3′], [補題4′], [補題5′], [補題6′] が成立つ。但しこれらの補題は次の通りである。

[問題3′]　この第二の定義の意味での二項關係$>$は反對稱律を滿足する。

[問題4′]　二項關係$>$では常に $x \wedge y < x$ と $x \wedge y < y$ が成立つ。

[問題5′]　$x \wedge y$ は x,y の infimum の性質を持つ。即ち $v < x$ かつ $v < y$ ならば $v < x \wedge y$。

[問題6′]　第二の定義の意味での二項關係$>$は推移律を滿足する。

従つて同様にして次の [補題7′] が成立つ。

[問題7′]　($A_u\wedge$)($K\vee$)($K\wedge$)($A_b\vee$)($A_b\wedge$) より ($A_s\wedge$) が得られる。

[補題1], [1′], [7], [7′] より明らかに次の定理が得られる。

[定理1]　(W. Felscher [1]) 公理系(2), (3), (4)は(1)と同等である。

なお公理系(1)における各公理の獨立性は，N. Kimura [2] によつて肯定的に解決されている。公理系(2), (3), (4)についても同様に各公理の獨立性が示される。

§ 2

[補題 8] (S. Rudeanu, [3]) ($A_b\vee$)と($A_b\wedge$)より($I\vee$)と($I\wedge$)が得られる。

[證明] ($A_b\vee$) により $x\vee(x\wedge x)=x$。從つて ($A_b\wedge$) を利用して，$x\wedge x=x\wedge\{x\vee(x\wedge x)\}=x$。同様に，$x\vee x=x$。

[補題 9] ($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_b\wedge$) より ($B\vee$) が得られる。

[證明] $x\vee y=x$ ならば ($K\vee$) によつて $y\vee x=x$ だから，($A_b\wedge$) によつて$y=y\wedge(y\vee x)=y\wedge x$。さらに ($K\wedge$) によつて $x\wedge y=y$。

[補題9′] ($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_b\vee$) より ($B\wedge$) が得られる。

[補題10] (M. Kobayashi, [4]) ($I\vee$), ($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_s\vee$), ($B\vee$)から ($A_b\wedge$) が得られる。

[證明] ($K\vee$), ($A_s\vee$), ($I\vee$)によつて，$(x\vee y)\vee x=x\vee(x\vee y)=(x\vee x)\vee y=x\vee y$ だから ($B\vee$) によつて，$(x\vee y)\wedge x=x$。 從つて ($K\wedge$) によつて，$x\wedge(x\vee y)=x$。

[補題10′] ($I\wedge$), ($K\vee$), ($K\wedge$), ($A_s\wedge$), ($B\wedge$) から ($A_b\vee$) が得られる。

[補題 8], [9], [9′], [10], [10′] より次の定理を得る。

[定理 2] (M. Kobayashi, [4]) 公理系(5)は公理系(1)と等値である。

[補題11] ($A_b\wedge$), ($A_u\wedge$), ($B\wedge$), ($K\vee$) より ($A_b\vee$) が得られる。

[證明] ($A_b\wedge$),($A_u\wedge$),($K\vee$)によつて， $x\wedge y=x\wedge\{y\wedge(y\vee x)\}=(x\wedge y)\wedge\{x\wedge(y\vee x)\}=(x\wedge y)\wedge\{x\wedge(x\vee y)\}=(x\wedge y)\wedge x$ だから，($B\wedge$) によつて，$(x\wedge y)\vee x=x$。さらに ($K\vee$) によつて $x\vee(x\wedge y)=x$。

[補題11′] ($A_b\vee$), ($A_u\vee$), ($B\vee$), ($K\wedge$) より ($A_b\wedge$) が得られる。

[補題 1] [1′], [7], [7′], [8], [9], [9′], [10], [10′], [11], [11′] によつて次の定理が得られる。

[定理 3] 公理系(6), (7)は公理系(1)と同等である。

ところが公理系(8)ではまつたく事情が異なる。

[定理 4] 公理系(8)を満足する algera は必ずしも lattice ではない。

[證明] 三つの元 a, b, c からなら集合Sに，次の乗積表による二項結合 $\vee$

と $\wedge$ を與えると，公理系(8)の各公理は満足するが，($A_s^{\vee}$) を満足しないから，この algebra $(S;\vee,\wedge)$ は lattice ではない。

$\vee$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$\wedge$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

この規則によると，$(a\vee b)\vee c=c\vee c=c$　　$a\vee(b\vee c)=a\vee a=a$　だから $(a\vee b)\vee c\neq a\vee(b\vee c)$ である。即ち ($A_s^{\vee}$) を満さない。

[補題12] ($I^{\vee}$)($B^{\vee}$) より ($I^{\wedge}$) が得られる。

[証明] ($I^{\vee}$) によつて，$x\vee x=x$。従つて ($B^{\vee}$)により $x\wedge x=x$。

[補題12′] ($I^{\wedge}$)，($B^{\wedge}$) より ($I^{\vee}$) が得られる。

[補題12]，[12′] によつて，次の定理が成立つ。

[定理 5] 公理系(5)，(6)，(7)より ($I^{\vee}$) 又は ($I^{\wedge}$) のどちらか一方を省略しても，元の公理系と同等な公理系が得られる。

[補題13] (Ю И Соркин[5])公理系(5)から ($I^{\vee}$) と($I^{\wedge}$)との兩方を省略すればもはや公理系(5)と同等な公理系にはならない。

[証明] 二つの元 a, b からなる集合 $S=\{a, b\}$ に次の乗積表による二項結合 $\vee$ と $\wedge$ を與える。

$\vee$	a	b
a	a	a
b	a	a

$\wedge$	a	b
a	a	b
b	b	a

この algebra は ($I^{\vee}$) と ($I^{\wedge}$) を満足しないが，公理系(5)の他の公理をすべて満足する。この例から明らかな様に，($I^{\vee}$) と ($I^{\wedge}$) は公理系(5)の他の公理だけからは決して導出されない。

Ю. И. Соркин のモデルは更に ($A_b^{\vee}$) を満足しない。$b\vee(b\wedge a)=b\vee b=a$ となつて $b\vee(b\wedge a)\neq b$ だからである。従つて公理系(5)から ($I^{\vee}$) ($I^{\wedge}$) の兩

方を省略した部分系は lattice を定義する公理系とはなり得ない，と同時に公理系(5)とも同等にはならぬ。

同様に公理系(6)，(7)から $(I\vee)(I\wedge)$ の両方を省略しては(6)，(7)と同等な部分系を得ることは出來ぬ。しかし次の補題から明らかな様に公理系(8)から $(I\vee)$，$(I\wedge)$ の両方を省略しても(8)と同等な公理系を得ることが出來る。

[補題14] $(K\vee)$，$(K\wedge)$，$(B\vee)$，$(B\wedge)$，$(A_u\wedge)$，$(A_u\vee)$ から $(I\vee)$，$(I\wedge)$，が得られる。

[証明] $(A_u\vee)$ と $(K\vee)$ より $x\vee(x\vee x)=(x\vee x)\vee(x\vee x)=\{(x\vee x)\vee x\}\vee\{(x\vee x)\vee x\}=\{x\vee(x\vee x)\}\vee\{x\vee(x\vee x)\}=x\vee\{(x\vee x)\vee(x\vee x)\}=x\vee\{x\vee(x\vee x)\}$ 従つて $(K\vee)$，$(K\wedge)$ と $(B\vee)$ によつて，

$$x\wedge\{x\vee(x\vee x)\}=x \quad \cdots\cdots ①$$

同様にして，$(A_u\wedge)$，$(K\wedge)$，$(K\vee)$，$(B\wedge)$ によつて，

$$x\vee\{x\wedge(x\wedge x)\}=x \quad \cdots\cdots ②$$

$(A_u\wedge)$ と ① より $x\wedge x=x\wedge\{x\wedge[x\vee(x\vee x)]\}=(x\wedge x)\wedge\{x\wedge[x\vee(x\vee x)]\}=(x\wedge x)\wedge x$ 従つて $(B\wedge)$ と $(K\vee)$ によつて

$$x\vee(x\wedge x)=x \quad \cdots\cdots ③$$

同様にして $(A_u\vee)$，$(K\wedge)$，$(B\vee)$ と②より

$$x\wedge(x\vee x)=x \quad \cdots\cdots ④$$

$(A_u\wedge)$，$(K\wedge)$ と ④より $x\wedge x=\{x\wedge(x\vee x)\}\wedge\{x\wedge(x\vee x)\}=x\wedge\{(x\vee x)\wedge(x\vee x)\}=\{x\wedge(x\vee x)\}\wedge\{(x\vee x)\wedge(x\vee x)\}=(x\vee x)\wedge\{x\wedge(x\vee x)\}=(x\vee x)\wedge x=x\wedge(x\vee x)=x$。

同様にして，$x\vee x=x$。

[補題14] によつて，次の公理系(11)は公理系(8)と同等である。

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} K\vee & B\vee & A_u\vee \\ K\wedge & B\wedge & A_u\wedge \end{pmatrix}$$

しかしながら，定理4で述べた様に，公理系(11)は公理系(1)と同等ではない。そこでこの公理系(11)に $(D\vee)$ と $(D\wedge)$ を附加して，公理系を作る。

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} K^{\vee} & B^{\vee} & A_u^{\vee} & D^{\vee} \\ K^{\wedge} & B^{\wedge} & A_u^{\wedge} & D^{\wedge} \end{pmatrix}$$

[補題15] ($D^{\vee}$), ($B^{\vee}$), ($K^{\vee}$), ($K^{\wedge}$) より ($A_b^{\wedge}$) が得られる。

[証明] ($D^{\vee}$) によつて $x\vee(x\vee y)=x\vee y$ だから，($K^{\vee}$) と ($B^{\vee}$) によつて $(x\vee y)\wedge x=x$。さらに ($K^{\wedge}$) によつて，$x\wedge(x\vee y)=x$。

[補題15′] ($D^{\wedge}$), ($B^{\wedge}$), ($K^{\vee}$), ($K^{\wedge}$) より ($A_b^{\vee}$) が得られる。

[補題16] ($A_b^{\wedge}$), ($A_u^{\wedge}$), ($K^{\vee}$), ($K^{\wedge}$), より ($D^{\wedge}$) が得られる。

[証明] ($A_b^{\wedge}$), ($A_u^{\wedge}$), ($K^{\vee}$), ($K^{\wedge}$),によつて，$x\wedge y=x\wedge\{y\wedge(y\vee x)\}=(x\wedge y)\wedge\{x\wedge(y\vee x)\}=(x\wedge y)\wedge\{x\wedge(x\vee y)\}=(x\wedge y)\wedge x=x\wedge(x\wedge y)$

[補題16′] ($A_b^{\vee}$), ($A_u^{\vee}$), ($K^{\vee}$), ($K^{\wedge}$) より ($D^{\vee}$) が得られる。

[補題17] ($A_b^{\wedge}$), ($B^{\wedge}$) より ($D^{\vee}$) が得られる。

[証明] ($A_b^{\wedge}$) によつて，$x\wedge(x\vee y)=x$だから($B^{\wedge}$)によつて，$x\vee(x\vee y)=x\vee y$。

[補題17′] ($A_b^{\vee}$), ($B^{\vee}$) より ($D^{\wedge}$) が得られる。

[定理 6] 公理系(9)と(10)はいずれも公理系(1)と同等である。

[証明] [補題15], [15′], [16], [16′] によつて，公理系 (9), (10) を満足する algebra はそれぞれ公理系(2)を満足する。[補題 9], [9′] によつて，公理系(2)を満足する algebra は ($B^{\vee}$), ($B^{\wedge}$) を満足するから，さらに [補題17], [17′] によつて ($D^{\wedge}$) ($D^{\vee}$) をも満足する。従つて，公理系(9)と(10)はいずれも公理系(2)と同等であり，従つて公理系(1)と同等である。

[定義 2] 公理系(12)の部分系Σは，公理系(12)と同等であつて，かつΣにおける各公理が獨立であるとき，minimal であるという。

公理系(9), (10)は minimal であろうか。今公理系(12)の部分系で(12)と同等な公理系をΣとおき，Σについて考察を進める。

[補題18] Σは ($B^{\vee}$) を含まねばならぬ。

[証明] 集合$S=\{a,b\}$に次の乗積表による二項結合$\vee$と$\wedge$を與える。

$\vee$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\wedge$	a	b
a	a	a
b	a	a

この二項結合は明らかに ($K^{\vee}$) ($K^{\wedge}$) ($D^{\wedge}$) ($A_u^{\wedge}$)を満足し，さらに ($A_u^{\vee}$)，($D^{\vee}$) を満足する。又常に $x \wedge y = a$ となるから，$x \wedge y = x$ が成立つのは $x = a$ のときだけで，そのときは $a \vee y = y$ が必ず成立つ。從つて ($B^{\wedge}$) も又滿足する。しかし，$b \vee b = b$ であるのに $b \wedge b \neq b$ であるから，($B^{\vee}$) を滿足していない。從つて，公理系(12)の ($B^{\vee}$) 以外の公理から決して ($B^{\vee}$) は導き出されない。

[補題18′] Σは ($B^{\wedge}$) を含まねばならぬ。

[証明] [補題18] のモデルと双對の乘積表を持つたモデルをとればよい。

[補題19] Σは ($K^{\vee}$) を含まねばならぬ。

[証明] 集合$S = \{a, b\}$ に次の乘積表による二項結合 $\vee$ と $\wedge$ を與える。

$\vee$	a	b
a	a	b
b	a	a

$\wedge$	a	b
a	a	a
b	a	a

($K^{\vee}$) は明らかに滿足されないが，($K^{\wedge}$)，($A_u^{\wedge}$)，($D^{\wedge}$) は明らかに成立つ。さらに ($B^{\vee}$) ($B^{\wedge}$) ($A_u^{\vee}$) ($D^{\vee}$) も成立つ。

[補題19′] Σ は ($K^{\wedge}$) を含まねばならぬ。

[補題20] Σ は ($A_u^{\vee}$) を含まねばならぬ。

[証明] 集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に次の二項結合を與える。

$$x \vee y = \begin{cases} 5 & (a=2 \text{かつ} b=3, \text{又は} a=3 \text{かつ} b=2 \text{のとき}) \\ \max(x, y) & (\text{その他のすべての場合}) \end{cases}$$

$$x \wedge y = \begin{cases} 1 & (a=2 \text{かつ} b=3, \text{又は} a=3 \text{かつ} b=2 \text{のとき}) \\ \min(x, y) & (\text{その他のすべての場合}) \end{cases}$$

(K∨), (K∧) は明らかに満足され，さらに (B∨) (B∧) (D∨) (D∧) $(A_u\wedge)$ も又満足される。しかし$2\vee(3\vee 4)=2\vee 4=4$, $(2\vee 3)\vee(2\vee 4)=5\vee 4=5$ だから，$2\vee(3\vee 4)\neq(2\vee 3)\vee(2\vee 4)$。従つて$(A_u\vee)$ は満足されない。

[補題20′] Σ は $(A_u\wedge)$ を含まねばならぬ。

[証明] 集合 S={1, 2, 3, 4, 5} に次の二項結合を与える。

$$x\vee y=\begin{cases}5 & (a=3かつb=4,又はa=4かつb=3のとき)\\ \max(x,y) & (その他のすべての場合)\end{cases}$$

$$x\wedge y=\begin{cases}1 & (a=3かつb=4,又はa=4かつb=3のとき)\\ \min(x,y) & (その他のすべての場合)\end{cases}$$

前補題と同様にして (K∨) (K∧) $(A_u\vee)$ (B∨) (B∧) (D∨) (D∧) が満されることが見られる。しかし$3\wedge(4\wedge 2)=3\wedge 2=2$
$(3\wedge 4)\wedge(3\wedge 2)=1\wedge 2=1$ だから。$3\wedge(4\wedge 2)\neq(3\wedge 4)\wedge(3\wedge 2)$。従つて$(A_u\wedge)$ は満されない。

[補題21] Σ は (D∨) と (D∧) とのいずれか一方を含まねばならぬ。

[証明] 定理4と同じモデルにおいて，$a\vee(a\vee b)=a\vee c=b$, $a\vee b=c$ だから $a\vee(a\vee b)\neq a\vee b$ であり (D∨) は満されない。同様に (D∧) も満されないが，公理系⑿の他の公理はすべて満される。従つて，(K∨) (K∧) $(A_u\vee)$ $(A_u\wedge)$ (B∨) (B∧) だけからは決して (D∨) も (D∧) も導き出されないから Σ は (D∨) 又は (D∧) を含まねばならない。

従つて、最後に次の定理が成立つ。

[定理7] 公理系⑿の部分系の中，公理系⑼と⑽だけが minimal である。

参考文献

[1] W. Felscher; Ein unsymmetrisches Assoziativ-Gesetz in der Verbandstheorie. Archiv-Math. 8(1957)171-174

[2] N. Kimura; Independency of axioms of lattices. Kôdai Math. Sem. Rep. (1950) 14.

[3] S. Rudeanu; Independent systems of axioms in lattice theory. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R. 35 (1959) 475-488

[4] M. Kobayashi; On the axions of the theory of lattice. Proc. Inp. Acad. Tokyo 19 (1943) 6-9.

[5] Ю. И. Соркин; Независимые системы аксиом, определяющие структуру. Украинский Мат. Журнал 3 (1951) 85-97